제13장 전자기장 상호작용
(Interaction with Electromagnetic Field)

13.1 전자기장이 존재할 때 운동량과 해밀토니안의 표현

전기장이나 자기장이 존재할 때 전하를 띤 입자의 슈뢰딩거 방정식을 풀기 위하여 우리는 전자기장이 존재할 때 해밀토니안이 어떻게 기술되는지부터 알아보자. 먼저 일반화된 좌표들을 x_i로 나타내면, 속도에도 의존하는 일반화된 위치에너지(generalized potential) $U(x_i, \dot{x}_i)$와 일반화된 힘(generalized force) Q_i 사이의 관계는 다음과 같이 주어진다.

$$Q_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{x}_i}\right)$$

한편, 전자기장이 존재할 때 전하 q를 띤 속도 $\vec{v}$의 입자가 받는 힘은 로렌츠 힘으로 다음과 같이 주어진다.

$$\vec{F} = q\vec{E} + \frac{q}{c}\vec{v}\times\vec{B}$$

여기서 전기장 $\vec{E}$와 자기장 $\vec{B}$는 스칼라 포텐셜 ϕ와 벡터 포텐셜 $\vec{A}$로 각각 다음과 같이 표현된다.

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}, \qquad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} \qquad \text{---------} \qquad (1)$$

이 표현을 이용하여 위 식을 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\vec{F} = q\left[-\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right] + \frac{q}{c}\vec{v}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})$$

그런데 $\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial\vec{A}}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial t}$ 에서 $\sum_i \frac{\partial\vec{A}}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial t} = (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}$ 로 쓸 수 있고, $\vec{v}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{v}\cdot\vec{A}) - (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}$ 의 관계가 성립하므로 다음 관계가 성립한다.

$$\vec{v}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{v}\cdot\vec{A}) - \frac{d\vec{A}}{dt} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

그러므로 우리는 로렌츠 힘을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\vec{F} = q\left[-\vec{\nabla}\left(\phi - \frac{1}{c}\vec{v}\cdot\vec{A}\right) - \frac{1}{c}\frac{d\vec{A}}{dt}\right]$$

그런데 여기서 $\frac{1}{c}A_i = \frac{d}{dv_i}\left(\phi - \frac{1}{c}\vec{v}\cdot\vec{A}\right)$로 쓸 수 있으므로 위 식은 다시 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\vec{F} = q\left[-\vec{\nabla}\left(\phi - \frac{1}{c}\vec{v}\cdot\vec{A}\right) - \frac{d}{dt}\left\{\frac{d}{dv_i}\left(\phi - \frac{1}{c}\vec{v}\cdot\vec{A}\right)\right\}\right]$$

이 식을 앞에서 나온 일반화된 힘과 비교하면 일반화된 위치에너지 $U(x_i, v_i)$가 다음과 같이 주어짐을 알 수 있다.

$$U(x_i, v_i) = q\phi - \frac{q}{c}\vec{v} \cdot \vec{A}$$

그러므로 라그랑지안 $L = T - U$는 다음과 같이 주어진다.

$$L = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 - q\phi + \frac{q}{c}\vec{v} \cdot \vec{A}$$

라그랑지안으로부터 운동량은 $p_i \equiv \frac{dL}{d\dot{x}_i}$의 관계로 주어지므로 운동량은 다음과 같아진다.

$$p_i \equiv \frac{dL}{d\dot{x}_i} = mv_i + \frac{q}{c}A_i,$$

즉

$$\vec{p} = m\vec{v} + \frac{q}{c}\vec{A} \qquad \text{----------} \quad (2)$$

로 주어진다. 해밀토니안은 라그랑지안으로부터 $H = \sum_i p_i \dot{x}_i - L$의 관계로 주어지므로 최종적으로 해밀토니안은 다음과 같아진다.

$$H = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + q\phi = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2 + q\phi \qquad \text{--------} \quad (3)$$

이는 통상의 $H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V$와 비교했을 때 운동량 $\vec{p}$를 $\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}$로 바꾼 결과와 같음을 보여준다.

▶ 게이지 변환에 대한 불변성 (Invariance under gauge transformations) ◀

우리는 (1)식에서 주어진 전기장과 자기장이 스칼라 포텐셜과 벡터 포텐셜의 다음과 같은 변환에 대하여 변하지 않음을 곧 알 수 있다.

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\lambda \qquad \text{--------} \quad (4)$$

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\lambda}{\partial t}$$

여기서 λ는 시간과 공간좌표에 대한 임의의 함수로서, $\lambda = \lambda(\vec{x}, t)$, 흔히 게이지 함수(gauge function)라고 하며, 전자기장을 변하지 않게 하는 (4)식과 같은 스칼라 및 벡터 포텐셜의 변환을 우리는 게이지 변환(gauge transformation)이라고 부른다. 이러한 스칼라 및 벡터 포텐셜의 변환에 대한 전자기장의 불변성을 우리는 게이지 불변성(gauge invariance)이라고 한다. 이러한 게이지 불변성은 다른 한편으로 스칼라 및 벡터 포텐셜이 갖는 게이지 변환에 대한 대칭성으로 해석할 수도 있다. 이 경우 게이지 대칭성의 기술에 한 가지 게이지 함수만 필요하므로 우리는 전자기 상호작용이 $U(1)$ 대칭성을 갖는다고 한다. 참고로 불

변성과 대칭성은 항상 동전의 양면과 같음을 기억하자. 앞에서 우리는 선운동량 불변성이 병진이동에 대한 대칭성을, 각운동량 불변성이 회전이동에 대한 대칭성을 의미함을 보았다.

한편, 이러한 게이지 불변성은 전자기 상호작용을 기술하는 막스웰의 방정식들을 풀어서는 스칼라 및 벡터 포텐셜을 확정할 수 없음을 의미하므로, 스칼라 및 벡터 포텐셜을 확정하기 위해서 우리는 게이지 함수를 고정시키는 조건을 인위적으로 추가하여 주어야 한다. 이처럼 게이지 함수를 고정하는 조건 즉 게이지 조건식(gauge condition)을 추가하는 것을 우리는 게이지 고정(gauge fixing)이라고 부른다. 이러한 과정을 우리는 게이지 선택이라고 하기도 하는데 이는 어떤 특정한 경우의 문제를 풀기 위해서는 특정한 유형의 게이지 조건식을 사용하는 것이 적절하기 때문이다. 전자기 상호작용의 경우 주로 사용하는 게이지 조건식이 두 가지가 있는데, 하나는 쿨롱 게이지 조건식(Coulomb gauge condition)이고 다른 하나는 로렌츠 게이지 조건식(Lorentz gauge conditon)이며 각각 다음과 같다.

1) 쿨롱 게이지:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \qquad \text{-------} \quad (5)$$

2) 로렌츠 게이지:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad \left(\frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\mu}} = 0\,,\ \mu = 0,1,2,3 \right) \quad \text{------} \ (6)$$

위에서 $A^{\mu} = (\phi, \vec{A})$ 를 $x^{\mu} = (ct, \vec{x})$ 를 각각 표시한다.

이제 게이지 고정 조건이 막스웰 방정식을 푸는데 어떻게 사용되는지 한번 살펴보기로 하자. 진공에서 기술되는 막스웰의 네 방정식은 다음과 같다.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad \text{---------} \quad (7)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \qquad \text{---------} \quad (8)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \qquad \text{---------} \quad (9)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{J} \qquad \text{-----} \quad (10)$$

여기서 ρ 는 전하 밀도(charge density)이고, $\vec{J}$ 는 전류 밀도(current density)이며 이를 합쳐서 전류 밀도 4-벡터로 $J^{\mu} = (c\rho, \vec{J})$ 와 같이 표시하기도 한다. 전하 보존(charge conservation)은 앞의 5장에서 살펴본 바와 같이 다음의 연속방정식을 준다.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \quad \left(\frac{\partial J^{\mu}}{\partial x^{\mu}} = 0\,,\ \ \mu = 0,1,2,3 \right) \quad \text{-----} \ (11)$$

막스웰 방정식 중 첫 두식(7,8)은 전기장과 자기장을 (1)식처럼 스칼라 및 벡터 포텐셜로 쓸 수 있음을 뜻하며, 나중 두식(9,10)은 각각 다음과 같은 스칼라 및 벡터 포텐셜로 함께 쓰여지는 방정식을 준다.

$$-\nabla^2 \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = 4\pi\rho \qquad \text{-------} \quad (12)$$

$$-\nabla^2\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}+\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t})=\frac{4\pi}{c}\vec{J} \quad \text{--- (13)}$$

여기서 쿨롱 게이지 (5)식을 쓰면 (12)식이 스칼라 포텐셜에 대한 푸아송 방정식(Poisson equation)이 되어서 스칼라 포텐셜에 대한 시간에 무관한 방정식을 얻을 수 있으며, 로렌츠 게이지 (6)식을 쓰면 (12,13)식이 스칼라 및 벡터 포텐셜에 대한 비균질 파동방정식(inhomogeneoua wave equation)이 된다.

쿨롱 게이지의 경우: $-\nabla^2\phi=4\pi\rho$

로렌츠 게이지의 경우: $-\nabla^2\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=\frac{4\pi}{c}\vec{J}$

$$-\nabla^2\phi+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=4\pi\rho$$

여기서 주의할 점은 로렌츠 게이지의 경우 게이지 함수가 다음 조건을 만족하는 경우에는 4-포텐셜이 추가적인 게이지 변환에 대해서도 위의 방정식을 여전히 만족한다는 점이다.

$$\nabla^2\lambda-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\lambda}{\partial t^2}=0$$

우리는 이처럼 게이지 고정 후에도 남아있는 대칭성을 잔류 대칭성(residual symmetry)이라고 하며, 이 경우 4-포텐셜을 완전히 확정하기 위해서는 추가적인 게이지 고정이 더 필요함을 보여준다.

13.2 전자기장이 존재할 때의 슈뢰딩거 방정식

앞에서 구한 전자기장이 존재할 때의 해밀토니안 (3)식을 쓰면 이 경우 슈뢰딩거 방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\left[\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}-\frac{q}{c}\vec{A}\right)^2+q\phi\right]\psi=E\psi \quad \text{--------- (14)}$$

위에서 ϕ 와 $\vec{A}$ 는 각각 스칼라 및 벡터 포텐셜이다. 이때 첫째 항 $\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}-\frac{q}{c}\vec{A}\right)^2\psi$ 는

$$-\hbar^2\nabla^2\psi-\frac{\hbar}{i}\frac{q}{c}[\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\psi)+\vec{A}\cdot(\vec{\nabla}\psi)]+\left(\frac{q}{c}\right)^2\vec{A}^2\psi$$

과 같이 쓰여지는데, 여기의 둘째 항은 다시 다음과 같이 쓸 수 있으므로

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\psi)=(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})\psi+\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\psi$$

슈뢰딩거 방정식은 다음과 같이 된다.

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2-\frac{\hbar}{i}\frac{q}{2mc}\{(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})+2(\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\}+\frac{1}{2m}\left(\frac{q}{c}\right)^2\vec{A}^2+q\phi\right]\psi=E\psi$$

여기서 쿨롱 게이지 $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$ 를 선택하면 슈뢰딩거 방정식은 다음과 같이 쓰여 진다.

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2-\frac{\hbar}{i}\frac{q}{mc}(\vec{A}\cdot\vec{\nabla})+\frac{1}{2m}\left(\frac{q}{c}\right)^2\vec{A}^2+q\phi\right]\psi=E\psi \quad \text{--- (15)}$$

이제 간단한 예로서 우리가 10장에서 제만효과로 다루었던 균일한 상수의 외부 자기장이 존재하는 경우를 생각하여 보자. 균일한 상수의 자기장을 $\vec{B}$ 로 표시하면, 이 경우 벡터 포텐셜은 자기장으로 다음과 같이 표시된다.

$$\vec{A} = -\frac{1}{2}\vec{x}\times\vec{B} \qquad \text{-----------} \quad (16)$$

우리는 위 관계식이 실제로 $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$ 의 관계를 만족함을 곧 알 수 있다. $\vec{p} = \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}$ 및 (16)식을 쓰면, (15)식의 둘째 항과 셋째 항의 $\vec{A}^2$은 각각 다음과 같이 된다.

$$-\frac{\hbar}{i}\frac{q}{mc}(\vec{A}\cdot\vec{\nabla}) = \frac{q}{2mc}(\vec{x}\times\vec{B})\cdot\vec{p} = \frac{q}{2mc}\epsilon_{ijk}x_j B_k p_i$$

$$= -\frac{q}{2mc}\epsilon_{kji}B_k x_j p_i = -\frac{q}{2mc}\vec{B}\cdot(\vec{x}\times\vec{p}) = -\frac{q}{2mc}\vec{B}\cdot\vec{L}$$

$$\vec{A}^2 = \frac{1}{4}(\vec{x}\times\vec{B})\cdot(\vec{x}\times\vec{B}) = \frac{1}{4}\left\{r^2B^2 - (\vec{r}\cdot\vec{B})^2\right\}, \quad r^2 = \sum_i x_i^2, \quad B^2 = \vec{B}\cdot\vec{B}$$

여기서 둘째 항의 $\frac{q}{2mc}\vec{L}$ 은 전하 q 를 가진 입자의 궤도 각운동량에 의한 자기쌍극자 모멘트 $\vec{\mu}_l$ 이므로 둘째 항은 10장에서 궤도 각운동량에 의한 전자의 자기쌍극자 모멘트와 외부 자기장 사이의 상호작용에 의한 건드림 해밀토니안 $H' = -\vec{\mu}_l\cdot\vec{B}$ 와 동일함을 알 수 있다. 다시 10장에서처럼 $\vec{B} = B_0\hat{k}$ 로 놓으면 $\vec{A}^2 = \frac{1}{4}(x^2+y^2)B_0^2$ 이 되어 (15)식의 전체 해밀토니안은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{q}{2mc}B_0L_z + \frac{1}{8m}\left(\frac{q}{c}\right)^2 B_0^2(x^2+y^2) + q\phi \qquad \text{------} \ (17)$$

여기서 원자의 경우, $<L_z> \sim \hbar$ 이고, $<x^2+y^2>$ 은 대략 보어 반경의 제곱과 같다고 할 수 있으므로 둘째 항과 셋째 항의 비율은 전자($q=-e$)의 경우 대략 다음과 같다.

$$\frac{e^2B_0^2 <x^2+y^2> /8mc^2}{eB_0 <L_z> /2mc} = \frac{eB_0a_0^2}{4\hbar c} \simeq \frac{B_0}{1\times 10^{10}[\text{gauss}]}$$

실제 원자에 작용하는 외부 자기장은 통상 10^4gauss 보다 크지 않으므로 셋째 항은 둘째 항에 비해 무시할 수 있다. 이제 (17)식은 셋째 항을 무시하고 다시 다음과 같이 쓸 수 있을 것이다.

$$H = H_0 + H'; \quad H_0 = \frac{p^2}{2m} - e\phi, \quad H' = \frac{e}{2mc}B_0L_z \qquad \text{------} \quad (18)$$

여기서 H_0 는 쿨롱 포텐셜에 의한 원래 해밀토니안임을, H' 은 전자의 궤도 각운동량에 의한 자기쌍극자 모멘트와 외부 자기장에 의한 제만 효과를 주는 건드림 해밀토니안임을 보여준다. 참고로 스핀 각운동량에 의한 효과는 고려하지 않고 궤도 각운동량 만에 의할 경우를 정상 제만 효과(normal Zeeman effect), 스핀 각운동량까지 고려한 경우를 비정상 제만 효과(anomalous Zeeman effect)라고 부르기도 하는데 이는 관례적인 명칭일 뿐이다.

▶ 슈뢰딩거 방정식에서의 게이지 불변성 ◀

(Gauge invariance of the Schrödinger equation)

이제 우리가 앞에서 살펴본 게이지 불변성이 슈뢰딩거 방정식에서는 어떻게 나타나는지 살펴보기로 하자. 시간에 의존하는 슈뢰딩거 방정식은 (3)식의 해밀토니안으로부터 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\left[\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2 + q\phi \right]\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} \qquad \text{---------} \quad (19)$$

여기서 (4)식에서처럼 4-포텐셜이 게이지 변환을 하였을 경우에도

$$\vec{A} \to \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\lambda ,$$

$$\phi \to \phi' = \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\lambda}{\partial t} , \qquad \lambda = \lambda(\vec{x}, t) ,$$

동일한 물리계를 기술하므로 동일한 슈뢰딩거 방정식이 만족되어야 할 것이다. 그러므로 변환된 포텐셜로 주어진 슈뢰딩거 방정식을 만족하는 파동함수를 ψ' 이라고 하면 다음 식이 성립하여야 한다.

$$\left[\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - \frac{q}{c}\vec{A}'\right)^2 + q\phi' \right]\psi' = i\hbar\frac{\partial\psi'}{\partial t}$$

이제 변환된 파동함수 ψ' 을 찾기 위하여 다음과 같이 파동함수가 변화하였다고 가정하자.

$$\psi \to \psi' = e^{i\delta(\vec{x}, t)}\psi$$

이 경우 $\delta(\vec{x}, t)$ 는 다음 방정식을 만족하여야 한다.

$$\left[\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - \frac{q}{c}\vec{A} - \frac{q}{c}\vec{\nabla}\lambda\right)^2 + q\phi - \frac{q}{c}\frac{\partial\lambda}{\partial t} \right] e^{i\delta(\vec{x}, t)}\psi = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left[e^{i\delta(\vec{x}, t)}\psi \right]$$

이 식을 정리하여 다시 쓰면 다음의 방정식을 얻는다.

$$\left[\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} + \hbar\vec{\nabla}\delta - \frac{q}{c}\vec{A} - \frac{q}{c}\vec{\nabla}\lambda\right)^2 + q\phi - \frac{q}{c}\frac{\partial\lambda}{\partial t} \right]\psi = -\hbar\frac{\partial\delta}{\partial t}\psi + i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

이를 (19)식과 비교하면, 다음의 조건이 만족될 때 두 식이 동일함을 알 수 있다.

$$\hbar\,\delta(\vec{x}, t) = \frac{q}{c}\lambda(\vec{x}, t)$$

즉, 게이지 불변성이 성립하려면, 파동함수가 다음과 같이 게이지 함수에 따라 변환하여야 한다.

$$\psi(\vec{x}, t) \to \psi'(\vec{x}, t) = \exp\left[i\frac{q}{\hbar c}\lambda(\vec{x}, t) \right]\psi(\vec{x}, t) \qquad \text{------} \quad (20)$$

이는 파동함수의 경우 게이지 변환에 의해 그 위상만 변화함을 보여준다. 이제 전자기장 내에 전자가 존재할 때 전자에 작용하는 4-포텐셜이 전자기장이 지니는 게이지 불변성에 따라 게이지 변환을 할 수 있고, 그 경우 전자의 파동함수도 그 위상이 변화하여야 함을 살펴보았다. 이제 이러한 파동함수의 위상 변화가 실제 어떠한 영향을 줄 수 있는지 살펴보기로 하자.

13.3 아로노프-보옴 효과 (Aharonov-Bohm effect)

자기장이 0 인 영역에서는 $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$ 의 관계에서 $\vec{A} = \vec{\nabla} f$ 로 쓸 수 있으며 이때 f 는 $\vec{x}$ 와 t 에 대한 임의의 함수이다. 이를 (4)식의 게이지 변환과 비교하면 자기장이 0 인 경우에 벡터 포텐셜은 순수 게이지 함수로 주어짐을 뜻한다. 한편 $\vec{A} = \vec{\nabla} f$ 의 관계로부터 f 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

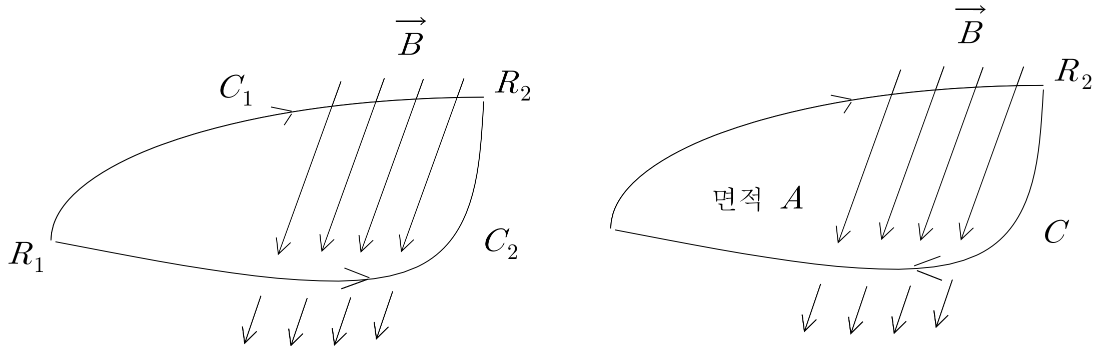
$$f(\vec{x}, t) = \int^{\vec{x}} \vec{A}(\vec{x}', t) \cdot d\vec{x}' \qquad \text{--------} \quad (21)$$

한편 앞에서 우리는 파동함수 ψ 가 게이지 변환에 따라 (20)식처럼 위상이 변한다는 것을 보았다. 그런데 (21)식의 함수 f 는 (4)식의 게이지 변환 함수 λ 와 동일하게 벡터 포텐셜 $\vec{A}$ 와 연관되어 있으므로, 자기장이 0 이지만 벡터 포텐셜이 0 이 아닌 영역 내에서 경로 C 를 따라 전하를 띤 입자가 이동하였을 때 이 입자를 기술하는 파동함수의 위상 변화는 (20)식과 (21)식에서 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\psi = e^{i\delta(\vec{x}, t)} \psi_0 \ , \quad \delta = \frac{q}{\hbar c} \int_C \vec{A}(\vec{x}', t) \cdot d\vec{x}' \qquad \text{-------} \ (22)$$

여기서 ψ_0 는 경로 C 를 따라 전하를 띤 입자가 이동하였을 경우에는 시작점에서의 파동함수로, 또는 게이지 변환의 관점에서는 게이지 변환 전의 파동함수로 생각할 수 있겠다.

여기서 전하를 띤 입자가 자기장이 0 인 영역 내의 동일한 시작점 R_1과 끝점 R_2을 가지는 경로 C_1 과 C_2 를 따라 이동하였을 경우를 생각하여 보자(그림1a 참조). 이때 두 경로로 둘러싸인 닫힌 경로 C 의 내부에는 자기장이 존재한다고 가정한다(그림1b 참조).



(a) 적분 경로1과 적분 경로2 (b) 닫힌 경로 C 와 면적 A

그림1. 두 적분 경로에 의한 닫힌 경로 C 와 닫힌 경로에 의하여 둘러싸인 면적 A

이제 R_1 에서 함께 출발하여 R_2 로 함께 도착하는 두 경로 C_1 과 C_2 에 따라 이동하였을 때의 상태함수를 각각 ψ_1 , ψ_2 라고 하면 두 상태함수는 각각의 경로에 따라 각각 δ_1 , δ_2

라는 위상 변화를 할 것이다.

$$\psi_1 = e^{i\delta_1}\psi_0\,,\ \ \psi_2 = e^{i\delta_2}\psi_0$$

그러므로 두 상태함수는 도착하였을 때 상대적인 위상차 $\delta_1 - \delta_2$ 를 갖게 된다. 그런데 두 위상함수 δ_1 , δ_2 는 (22)식에서 같은 출발점 R_1과 같은 끝점 R_2 를 가지므로, $\delta_1 - \delta_2$ 는 닫힌 경로 적분이 된다(그림1 참조).

$$\delta_1 - \delta_2 = \frac{q}{\hbar c}\int_{C_1} \vec{A}(\vec{x}\,') \cdot d\vec{x}' - \frac{q}{\hbar c}\int_{C_2} \vec{A}(\vec{x}\,') \cdot d\vec{x}' = \frac{q}{\hbar c}\oint_{C} \vec{A}(\vec{x}\,') \cdot d\vec{x}'$$

그런데 닫힌 경로에 대한 적분 $\oint_C \vec{A}(\vec{x}\,') \cdot d\vec{x}'$ 는 스토크스 정리(Stokes theorem)에 의하여 그림1에서와 같이 닫힌 경로 C 가 둘러싸고 있는 면적 A에 대한 적분이 된다.

$$\oint_{C=\partial A} \vec{A}(\vec{x}\,') \cdot d\vec{x}' = \int_A \vec{\nabla}\times\vec{A} \cdot d\vec{a} \qquad \text{-------} \quad (23)$$

여기서 $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$ 이므로 이 면적적분은 곧 닫힌 경로를 통과하는 자기선속(magnetic flux)이 된다. 그러므로 위상차는 $\delta_1 - \delta_2 = \dfrac{q\Phi}{\hbar c}$ 이 되고, 이때 $\Phi \equiv \int_A \vec{B} \cdot d\vec{a}$ 는 자기선속이다.

이로부터 우리는 그림2에서처럼 자기장이 존재하는 영역을 둘러싸고 있는 자기장이 없는 영역을 통과하는 전하를 띤 입자의 경우 두 경로에 의하여 둘러싸인 면적을 통과하는 자기선속의 양이 변화함에 따라 두 경로에 의한 위상차가 달라짐을 알 수 있다. 즉, 두 경로에 둘러싸인 영역 내부의 자기장의 세기에 따라 간섭 패턴이 다르게 된다. 이러한 현상은 실제 실험으로 관측되며 이러한 측정 실험은 1959년 아로노프와 보옴이 처음 제안하였다. 때문에 이처럼 자기장이 없는 두 경로의 내부를 통과하는 자기장의 변화에 따라 간섭현상이 변화하는 것을 아로노프-보옴 효과(Aharonov-Bohm effect)라고 부른다.

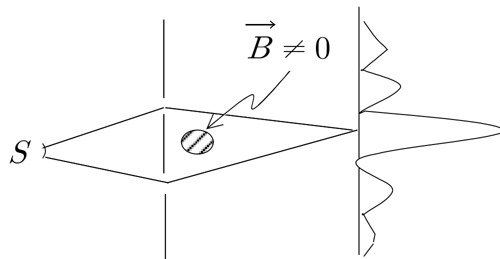


그림2. 아로노프-보옴 효과에 의한 간섭 현상의 변화

만약 전하 q 를 띤 한 입자가 위와 같이 자기장이 있는 영역을 둘러싸고 있는 자기장이 0 인 닫힌 경로를 한 바퀴 돌아 제자리로 왔다면 파동함수는 처음과 같아야 하므로 이 경우 위상차는 다음 조건을 만족하여야 한다.

$$\delta = \frac{q\Phi}{\hbar c} = 2n\pi \ , \quad n = \text{정수}$$

즉, 닫힌 경로 내의 자기선속은 다음과 같이 양자화되어야 한다.

$$\Phi = \frac{2\pi\hbar c}{q} n \ , \quad n = \text{정수}$$

13.4 기하학적 위상, 베리의 위상 (Geometric phase, Berry's phase)

12장에서 우리는 계가 천천히 변하는 경우 단열어림을 취하면 해밀토니안의 고유상태는 그 위상만 변화하고 이때의 위상은 기하학적 위상과 동역학적 위상의 두 가지로 나뉘는 것을 보았다.

$$\psi_l(t) \ \rightarrow \ \psi(t) = e^{i[\delta_g(t) + \delta_d(t)]}\psi_l(t)$$

앞에서 $\delta_g \equiv i\int_0^t \langle \psi_l \mid \dot{\psi}_l \rangle dt'$ 는 기하학적 위상으로, $\delta_d \equiv -\frac{1}{\hbar}\int_0^t E_l(t')\, dt'$ 는 동역학적 위상으로 각각 정의되었다. 1984년 영국의 물리학자 베리(M. Berry)는 위에 주어진 기하학적 위상이 동역학적 위상과는 달리 기하학적 의미를 가짐을 보였다. 이제 우리는 베리가 보인 기하학적 위상의 의미를 살펴보기로 하겠다.

기하학적 위상의 정의식, $\delta_g \equiv i\int_0^t \langle \psi_l \mid \dot{\psi}_l \rangle dt'$ 에서 나타나는 고유상태 ψ_l 이 어떤 매개변수들에 의존하며 이 고유상태가 시간에 따라 그 매개변수들의 공간에서 변화한다고 가정하자. 그러면 기하학적 위상은 매개변수 공간 M 에서의 경로적분으로 다음과 같이 쓸 수 있을 것이다.

$$\delta_g(t) = i\int_0^t \langle \psi_l \mid \overrightarrow{\nabla}_y \, \psi_l \rangle \cdot \ \frac{d\vec{y}}{dt'} dt' = \ i\int_{\vec{y}_0}^{\vec{y}_t} \langle \psi_l \mid \overrightarrow{\nabla}_y \, \psi_l \rangle \cdot d\vec{y}$$

여기서 $\vec{y} \in M$ 으로 주어진 시간에 해당하는 매개변수 공간에서의 위치벡터를 표시한다. 이제 시간이 T 만큼 지났을 때 매개변수 공간에서의 위치벡터가 다시 제자리로 돌아오는 경우를 생각하면 $\vec{y}_T = \vec{y}_0$ 가 될 것이다. 이 경우 만약 매개변수 공간이 1차원이라면 적분의 시작과 끝 값이 같으므로 위의 적분값은 0 이 될 것이다. 그러나 매개변수 공간이 2차원 이상이라면 위의 적분은 다음의 닫힌 경로 적분으로 표현할 수 있을 것이다.

$$\delta_g(T) = i\oint_C \langle \psi_l \mid \overrightarrow{\nabla}_y \psi_l \rangle \cdot d\vec{y} \ \equiv \gamma_l(C) \quad \text{-------} \quad (24)$$

여기서 시간이 T 만큼 지남에 따라 매개변수 공간에서 닫힌 경로 C 가 되고, 이 경로에 따라 고유상태 ψ_l 에 관한 경로적분을 하였으므로 우리는 이 위상을 $\gamma_l(C)$ 로 표시하였다. 이 $\gamma_l(C)$ 를 우리는 베리의 위상(Berry's phase)이라고 하며, 이는 닫힌 경로 C 에만 의존하므로 기하학적인 양임을 곧 알 수 있다. 이와 대조적으로 동역학적 위상은 시간에 절대적으로 의존함을 주목하자.

앞 절에서 살펴본 아로노프-보옴의 효과에서 나타나는 두 경로 사이의 위상차도 베리

의 위상, 즉 기하학적 위상의 한 가지인데 이제 이들이 어떻게 연관되어 있는지 살펴보기로 하겠다.

앞 절의 아로노프-보옴 효과에서 살펴보았다시피 자기장이 0 인 영역에서의 벡터 포텐셜은 $\vec{A} = \vec{\nabla} f$ 로 표시되고 이때 함수 f 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$f(\vec{x},t) = \int^{\vec{x}} \vec{A}(\vec{x}',t) \cdot d\vec{x}'$$

한편, 위에 주어진 벡터 포텐셜은 순수 게이지 변환에 의한 것과 같으므로 이 경우 파동함수는 게이지 변환에서와 동일한 방식으로 위상이 변화하게 된다. 그러므로 위의 적분에서 경로 C 가 $\vec{x}_1$ 에서 시작하여 $\vec{x}$ 에서 끝났다면 전하가 q 인 입자의 파동함수 ψ 는 벡터 포텐셜이 0 인 경우의 파동함수 ψ_0 와 비교하여 다음과 같이 그 위상이 변화하게 된다.

$$\psi = e^{i\delta(\vec{x},t)}\psi_0 \ , \quad \delta(\vec{x},t) = \frac{q}{\hbar c}\int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}} \vec{A}(\vec{x}',t) \cdot d\vec{x}' \quad \text{------ (25)}$$

이제 (24)식에 주어진 단열어림에서의 기하학적 위상을 구하기 위하여 고유상태 ψ_l 이 (25)식과 같은 관계로 벡터 포텐셜이 0 인 경우의 파동함수 ψ_{l0} 와 연관되었다고 하자.

$$\psi_l(\vec{x},t;\vec{y}) = e^{i\delta(\vec{x},t;\vec{y})}\psi_{l0}(\vec{x},t)\ , \quad \delta(\vec{x},t;\vec{y}) = \frac{iq}{\hbar c}\int_{\vec{y}}^{\vec{x}} \vec{A}(\vec{x}',t) \cdot d\vec{x}' \quad \text{-- (26)}$$

여기서 $\vec{A} = 0$ 인 경우의 파동함수 ψ_{l0} 은 다음 해밀토니안의 고유함수임을 유의하자.

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + q\phi\ , \quad H_0\psi_{l0} = E_l\psi_{l0}$$

그리고 앞서 얻은 기하학적 위상의 경로적분 표현

$$\gamma_l(C) = i\oint_C \langle \psi_l \mid \vec{\nabla}_y \psi_l \rangle \cdot d\vec{y} \qquad \text{----------- (27)}$$

에서 피적분함수인 기댓값은 (26)식에서의 $\vec{x}$ 에 대한 적분이라고 생각할 수 있으며, (27)식에서 경로가 변해가는 것을 (26)식에서의 기준점 $\vec{y}$ 가 변해가는 것으로 생각하면 이 기댓값은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}\langle \psi_l \mid \vec{\nabla}_y \psi_l \rangle &= \left\langle e^{i\delta(\vec{x},t;\vec{y})}\psi_{l0}(\vec{x},t) \,\middle|\, \vec{\nabla}_y \left(e^{i\delta(\vec{x},t;\vec{y})}\psi_{l0}(\vec{x},t)\right)\right\rangle \\ &= -\frac{iq}{\hbar c}\vec{A}(\vec{y},t)\end{aligned}$$

따라서 기하학적 위상은 (27)식에서 다음과 같이 주어진다.

$$\gamma_l(C) = \oint_C \frac{q}{\hbar c}\vec{A}(\vec{y},t) \cdot d\vec{y} = \frac{q}{\hbar c}\int_{\Sigma=\partial C} (\vec{\nabla}\times\vec{A}) \cdot d\vec{a}$$

이는 닫힌 경로 C 의 내부를 통과하는 자기선속 Φ 에 $\frac{q}{\hbar c}$ 를 곱한 값으로 앞에서 구한 아로노프-보옴 효과에서의 위상변화와 동일하다. 이로부터 우리는 아라노프-보옴 효과에서 나타나는 위상 변화가 기하학적 위상, 즉 베리의 위상임을 알 수 있다.

마지막으로 유의할 점은 여기서 우리가 고려한 위상의 중요한 특성은 닫힌 경로에서의

위상 변화였으며, 이는 시작점과 끝점이 같은 두 경로의 위상 차이와 같다는 것이다. 즉 위상 그 자체가 아니라 위상의 차이가 중요한 물리적 의미를 가진다는 점이다. 우리는 그전까지 파동함수의 위상 그 자체에는 별다른 물리적 의미를 부여하지 않았는데 여기서의 결과 역시 그러한 생각과 크게 배치되지 않음을 보여준다. 이는 고전물리학에서 위치에너지 자체는 큰 의미가 없지만, 위치에너지의 차이는 중요한 물리적 의미가 있는 것과 비슷하다고 하겠다.